

Gérald Tenenbaum

en collaboration avec

Jie Wu

Théorie analytique
et probabiliste des nombres
313 exercices corrigés



Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayant cause, est illicite et constitue une contrefaçon, aux termes des articles L.335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Maquette intérieure et couverture : RédacNet - www.redacnet.com

Illustration de couverture: © Gregor Reisch, *Allégorie de l'Arithmétique*, in *Margarita Philosophica* (1504)

Éditions Le voile des mots
102, rue Saint-Dizier, 54000 Nancy
www.voiledesmots.editions.free.fr

Dépôt légal avril 2024
Achevé d'imprimer en avril 2024.

© Voile des mots éditions, 2024
ISBN: 978-2-9587374-8-1
Tous droits réservés

Table des matières

Avant-propos	7
Notations	9
Tome I : Méthodes élémentaires	13
Chapitre I.0. Quelques outils d'analyse réelle	15
<i>Solutions</i>	19
Chapitre I.1. Les nombres premiers	25
<i>Solutions</i>	31
Chapitre I.2. Fonctions arithmétiques	41
<i>Solutions</i>	43
Chapitre I.3. Ordres moyens	49
<i>Solutions</i>	57
Chapitre I.4. Méthodes de crible	71
<i>Solutions</i>	75
Chapitre I.5. Ordres extrémaux	83
<i>Solutions</i>	87
Chapitre I.6. La méthode de van der Corput	93
<i>Solutions</i>	99
Chapitre I.7. Approximation diophantienne	107
<i>Solutions</i>	113
Tome II : Méthodes d'analyse complexe	121
Chapitre II.0. La fonction Gamma d'Euler	123
<i>Solutions</i>	127
Chapitre II.1. Fonctions génératrices : séries de Dirichlet	137
<i>Solutions</i>	143

Chapitre II.2. Formules de sommation	151
<i>Solutions</i>	153
Chapitre II.3. La fonction zêta de Riemann	155
<i>Solutions</i>	163
Chapitre II.4. Le théorème des nombres premiers et l'hypothèse de Riemann	175
<i>Solutions</i>	177
Chapitre II.5. La méthode de Selberg–Delange	181
<i>Solutions</i>	187
Chapitre II.6. Deux applications arithmétiques	201
<i>Solutions</i>	205
Chapitre II.7. Théorèmes taubériens	209
<i>Solutions</i>	213
Chapitre II.8. Nombres premiers en progressions arithmétiques	221
<i>Solutions</i>	227
Tome III : Méthodes probabilistes	241
Chapitre III.1. Densités	243
<i>Solutions</i>	247
Chapitre III.2. Loi de répartition d'une fonction arithmétique	253
<i>Solutions</i>	257
Chapitre III.3. Ordre normal	267
<i>Solutions</i>	273
Chapitre III.4. Fonctions additives et multiplicatives	291
<i>Solutions</i>	297
Chapitre III.5. Entiers friables. La méthode du col	309
<i>Solutions</i>	313
Chapitre III.6. Entiers sans petit facteur premier	325
<i>Solutions</i>	329
Index	357

Avant-propos

Ce fascicule a pour principal objet de fournir l'intégralité des solutions des 313 exercices du livre *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, paru en 2022 aux éditions Dunod. Une première version de cet ouvrage, écrite sous l'impulsion de Jie Wu, qui avait entrepris ce travail dès sa nomination à Nancy, était relative au volume 1 de la collection des *Cours spécialisés* de la Société mathématique de France. Elle comprenait donc les solutions des 182 exercices de cet ouvrage. Ils sont pour la plupart repris dans le présent fascicule.

Ainsi qu'il a été souligné dans la monographie dont ils sont issus, ces exercices correspondent à la double motivation de mettre en œuvre les notions fondamentales introduites dans l'exposé, et d'initier le lecteur à la recherche en théorie analytique des nombres. Cela a naturellement induit une rédaction des solutions plus succincte pour les exercices du premier type, plus développée pour ceux du second.

Pour la commodité du lecteur, la subdivision en tomes et chapitres a été conservée, et les énoncés sont reproduits. De même, et bien que les citations soient ici beaucoup moins nombreuses, la bibliographie du premier volume est reprise *in extenso*, mise à jour si nécessaire. Elle est également enrichie des références propres aux solutions.

Les exercices de ce fascicule ont été conçus comme partie intégrante du traité général. Sauf en de rares exceptions, les énoncés sont cependant compréhensibles de façon autonome. À cette fin, la section préliminaire de notations a été largement développée. Il reste que la rédaction des solutions renvoie librement, sans décodage des références, au texte du traité, tant pour l'utilisation de théorèmes que pour celle de formules isolées ou de principes de démonstrations. Il n'aurait pas été possible de procéder autrement sauf à augmenter déraisonnablement, par de fastidieuses redites, les dimensions du présent travail. Il est à noter que les numéros de formules des énoncés sont repris de celles du traité.

Jie Wu se joint à moi pour exprimer notre gratitude à Régis de la Bretèche, Kévin Destagnol, Sary Drappeau, Armand Lachand et Bruno Martin, qui nous ont fait l'amitié de vérifier certains chapitres et de proposer d'heureuses modifications.

Nancy, Mars 2024,

G.T.